確率的系における最適制御過程について : 最適制御の存在性 (動的計画法の研究会報告集)

南, 正義

数理解析研究所講究録
67巻 1969年 25-50

確率的系における最適制御過程について
— 最適制御の存在性 —

九州大学理学部　南　正義

§1. 序

最適制御問題の解析において、「最適解が存在するという仮定のもとでは、ポントリャーギンの最大原理がしばしば成立する」ことがよく知られている。それでは、最適解がはたして存在するかどうかということは一つの興味ある問題である。常微分方程式系で記述される場合の最適制御問題の解が存在するための十分条件については、J.P. Lasalle [1], E. O. Roxin [2], L. Cesari [3], [4] らの理論がよく知られており、偏微分方程式系で記述される場合の最適制御問題については、最近、L. Cesari [5] が [3] と同様の解析を行って、最適解が存在するための十分条件を与えている。

最近、確率的系における最適制御過程の研究が盛んになりつつあるが、そこでは、決定論的系において成立している結果が確率的系においてもやはり成立するかということが問題

意識の一つになっていると思われる。それでは、確率微分方程式系で記述される場合の最適制御問題に対して最適解が存在するか？ これについては、H. J. Kushner [6], [7], W. H. Fleming & M. Nisio [8] らが適当に制限された制御系に対しては最適解が存在することを, [2] を参考にしながら立証している。

そこで、特に、[6]の論文をもとにして確率微分方程式系で記述される 2, 3 の最適制御問題を定式化し、それぞれの問題に対して最適解が存在するための十分条件を与えながら、今後の問題点を提供することにする。これがこの報告の目的である。

§2. 最適制御問題 I & II の定式化

つぎのような確率微分方程式系によって記号的に記述される制御過程を考えることにする。

(SI) $$dx(\omega,t) = f(x(\omega,t), u(x(\omega,t),t))dt + dZ(\omega,t) \quad (1)$$

i.e.

$$x(\omega,t) = x(\omega,0) + \int_0^t f(x(\omega,\tau), u(x(\omega,\tau),\tau))d\tau + Z(\omega,t) - Z(\omega,0) \quad (2)$$

ここに、$x(\omega,t) = (x_0(\omega,t), x_1(\omega,t), \cdots, x_{n-1}(\omega,t))$,

$f(x,u) = (f_0(x,u), f_1(x,u), \cdots, f_{n-1}(x,u))$

はともに n 次元のベクトル函数とし、

$$z(\cdot,\cdot) = (z_0(\cdot,\cdot), z_1(\cdot,\cdot), \cdots, z_{n-1}(\cdot,\cdot))$$

はn次元ベクトルの雑音過程とする。また、

$$u(\cdot,\cdot) = (u_1(\cdot,\cdot), u_2(\cdot,\cdot), \cdots, u_r(\cdot,\cdot))$$

は制御 と呼ばれるr次元のベクトル函数とする。さらに

$x_0(\omega, 0) \equiv 0$, $z_0(\omega, t) \equiv 0$ なる制限を付け加える。

(i.e. $dx_0(\omega, t) = f_0(x(\omega,t), u(x(\omega,t),t)\,dt$)

注意1. 制御$u(x(\omega,t), t)$はより一般の形式$u(\omega, t)$に適宜置き換えてもよいことにする。

記号

Ω : 抽象空間(標本空間と呼ぶ)、

$\omega \in \Omega$: 標本点、

$[0,T] \equiv \{t : 0 \leqq t \leqq T\}$; 但し、$0 < T < +\infty$: 任意に固定する。

$z(\omega,t)$は直積空間$\Omega \times [0,T]$からn次元ユークリッド空間E^nの中への写像として、つぎのように定義された確率過程とする。すなわち、

$\Sigma(t)$: $z(\cdot,\tau)$, $0 \leqq \tau \leqq t$が可測となるΩ上の最小のσ-field (しからば、$s \leqq t \Rightarrow \Sigma(s) \subset \Sigma(t)$)。

$\mathcal{T}(T)$: 閉区間$[0,T]$上のBorel field。

$\tilde{\Sigma}(T) \equiv \mathcal{B}(\Sigma(T) \times \mathcal{T}(T))$: $\Sigma(T) \times \mathcal{T}(T)$における直積集合によって生成される直積空間$\Omega \times [0,T]$上の最小の$\sigma$-field。

$\mu(d\omega)$: Ω 上の σ-field $\Sigma(T)$ についての確率測度。
（ただし，$\mu(\Omega)=1$ ）。

$l(dt)$: 閉区間 $[0,T]$ 上の Borel field についての Lebesgue 測度。

$m(d\omega \times dt) \equiv \mu(d\omega)\otimes l(dt)$: $\tilde{\Sigma}(T)$ 上の直積測度．

このようにして，確率空間 $(\Omega, \Sigma(t), \mu(d\omega))$, $0\leq t\leq T$．および 可測空間 $(\Omega\times[0,T], \tilde{\Sigma}(T), m(d\omega\times dt))$ を考えることにする。さらに，制御函数のクラス

$$\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{F}(K) = \left\{ u(x,t) : \begin{array}{l} \|u(x+\varepsilon, t+\delta) - u(x,t)\| \leq K(\|\varepsilon\|+|\delta|) \\ \& \ \|u(0,0)\| \leq K \ , \ u : E^{n+1} \xrightarrow[\text{into}]{} E^1 \end{array} \right\} \quad (3)$$

を考える。但し，K は与えられた有限の定数，$\|u\| \equiv \sum_{i=1}^{r}|u_i|$ $(u=(u_1,\cdots,u_r))$，$\|\varepsilon\| \equiv \sum_{i=0}^{n-1}|\varepsilon_i|$ $(\varepsilon=(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}))$．

いま，制御 $u\in\mathfrak{F}$ に対応する(SI)の解を $x(\omega,t)$，$t\geq 0$ とおいて，<u>random stopping time</u>

$$T_\omega \equiv T_\omega(u) = \inf\{t : g(x(\omega,t)) = 0\} \quad (4)$$

を定義する。ここに，$g : E^n \to E^1$ は与えられた連続函数とする。さらに，制御 $u\in\mathfrak{F}$ に対応する <u>Risk function</u>

$$\begin{aligned} R(u) &\equiv E\left[\int_0^{T_\omega} f_0(x(\omega,t), u(x(\omega,t),t))\,dt\right] \\ &= E\,x_0(\omega, T_\omega) \end{aligned} \quad (5)$$

（i.e. 汎函数 $R : \mathfrak{F} \to E^1$ ）を定義する。最適制御問題 I を定式化するために，<u>admissible controls $u(\cdot,\cdot)$ の</u>

クラスとして、

$$\mathfrak{F}_1 \equiv \mathfrak{F}_1(\hat{T}) = \left\{ u \in \mathfrak{F} : \begin{array}{l} ET_\omega \leqslant \hat{T}\ ,\ 0 \leqslant T_\omega < +\infty\ (w.p.1.) \\ \&\ R(u) = Ex_0(\omega, T_\omega)\ \text{が有限} \end{array} \right\} \quad (6)$$

を考える。但し、$\hat{T}$ は与えられた有限の定数とする。

注意2. *w. p. 1. = with probability 1* の略語。

問題 I

$$R(u^*) = \inf_{u \in \mathfrak{F}_1} R(u) \quad (7)$$

を満足する $u^* \in \mathfrak{F}_1$ が存在するか？

次に、制御 $u \in \mathfrak{F}$ に対応する解 $x(\omega, t)$, $t \geqslant 0$ に対して、境界条件：

$$g(Ex(\omega, T)) = 0 \quad (8)$$

を満足する *non-random terminal time* $T \geqslant 0$ を考えて、*Risk function*

$$\begin{aligned} R(u,T) &\equiv E\left[\int_0^T f_0(x(\omega,t), u(x(\omega,t),t))\,dt\right] \\ &= E\,x_0(\omega,T) \end{aligned} \quad (9)$$

(i.e. 汎函数 $R : \mathfrak{F} \times E^1 \to E^1$) を定義する。最適制御問題 II を定式化するために、*admissible pairs* (u, T) のクラスとして、

$$\mathfrak{F}_2 \equiv \mathfrak{F}_2(\hat{T}) = \left\{ (u,T) : \begin{array}{l} u \in \mathfrak{F}\ ,\ g(Ex(\omega,T)) = 0\ ,\ 0 \leqslant T \leqslant \hat{T} \\ \&\ R(u,T) = Ex_0(\omega,T)\ \text{が有限} \end{array} \right\} \quad (10)$$

を考える。但し、$\hat{T}$ は与えられた有限の定数とする。

<u>問題II</u>

$$R(U^*, T^*) = \inf_{(U,T)\in\mathfrak{F}_2} R(U,T) \tag{11}$$

を満足する $(U^*, T^*)\in\mathfrak{F}_2$ が存在するか？

§3. 問題I & IIに関する最適解の存在定理

<u>仮定</u>

次の2条件(A1),(A2) を満足するようなベクトル x, u, δx, δu に無関係な非確率的有限の定数 K_1 が存在するものとし、さらに、(A3)～(A5) を仮定する。

(A1) $|f_i(x,u)| \leqslant K_1(1+\|x\|+\|u\|)$, $i=0,1,\cdots,n-1$.

ここに、$\|x\| \equiv \sum_{i=0}^{n-1}|x_i|$, $\|u\| \equiv \sum_{i=1}^{r}|u_i|$.

(A2) $|f_i(x+\delta x, u+\delta u) - f_i(x,u)| \leqslant K_1(\|\delta x\|+\|\delta u\|)$,

$i=0,1,\cdots,n-1$.

(A3) 任意のT $(0<T<+\infty)$ に対して、$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|Z(\omega,t)\|$ は $\Sigma(T)$-可測で、かつ、$E\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|Z(\omega,t)\| < +\infty$, さらに、$E\,Z(\omega,t)=0$, $0\leqslant t\leqslant T$.

(A4) $Z(\cdot,\cdot)$ は $\Omega\times[0,T]$ 上で $\tilde{\Sigma}(T)$-可測である。

(A5) $g: E^n \to E^1$ は与えられた連続函数とする。

<u>注意3.</u> $|f_i(x,u)| \neq \infty$, $i=0,1,\cdots,n-1$ であれば、(A2) から(A1) が導かれる。その意味で、(A1) は消略しても差しつかえない。(A1) は以下の補題1, 定理1 および定理

2を証明する過程の中でしばしば適用されるために、便宜上付け加えた仮定にすぎない。

補題1.

（SI）型の系に対して，（A1）〜（A5）を仮定する。$x(0)=(0, x_1(0), \cdots, x_{n-1}(0))$ は任意に与えられた n 次元の定数ベクトルとする。しからば，

1° 任意の T（$0<T<+\infty$）に対して，$u(\cdot,\cdot)\in\mathfrak{F}$ に対応し，初期条件 $x(\omega, 0)=x(0)$ を満足する（SI）の *Lebesgue* 積分可能な解 $x(\omega,\cdot)$ が閉区間 $0\leqq t\leqq T$ において確率1で存在して，しかも高々 μ 測度零の ω－集合を除いて一意に決まる（解の存在性と一意性）。さらに，$x(\cdot, t)$（$0\leqq t\leqq T$）は $\sum(t)$－可測である。特に，$Z(\omega, t)$ の標本函数が確率1で連続ならば，（SI）の解 $x(\omega, t)$ もまた確率1で連続である（解の連続性）。

2°
$$E \sup_{0\leqq t\leqq T}\|x(\omega, t)\| \leqq K_2(T) \quad \text{for all } u\in\mathfrak{F} \qquad (12)$$
となるような u に依存しないある有限の定数 $K_2(T)$ が存在する（解の一様有界性）。

3° $Z(\omega, t)$ の標本函数が確率1で連続であるとする。
$$0\leqq T_\omega = T_\omega(u) < +\infty \qquad w.p.1. \qquad (13)$$
となるようなある $u\in\mathfrak{F}$ が存在するならば，T_ω および

$x(\omega, T_\omega)$ は確率変数となり．境界条件

$$g(x(\omega, T_\omega)) = 0 \qquad w.p.1. \tag{14}$$

を満足する．

注意4. 補題1.の1°の証明は通常のPicardの反復法によって導かれる（証明略）．

注意5. 補題1.の2°の証明は（A1），（A3）とつぎのGronwallの基本補題を用いることによって導かれる（証明略）．

基本補題（Gronwall）

$f(t)$, $g(t)$, $h(t) \geqq 0$ はともに閉区間 $a \leqq t \leqq b$ 上でLebesgue積分可能とする。

$$h(t) \leqq f(t) + \int_a^t g(\tau) h(\tau) d\tau \tag{15}$$

$$\Rightarrow \ h(t) \leqq f(t) + \int_a^t f(\tau) g(\tau) \exp\left[\int_\tau^t g(s) ds\right] d\tau \tag{16}$$

注意6. この基本補題の証明は M.N. Oğuztöreli [9], PP. 43～44 を参照されたい。

注意7. （補題1.の3°の証明）

$$C_t \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{0 \leqq r \leqq t \\ r: \text{有理数}}} \left\{ \omega : |g(x(\omega, r))| < \frac{1}{n} \right\} \tag{17}$$

とおくと、$x(\cdot, r)$ の $\Sigma(r)$-可測性したがって $\Sigma(t)$-可測性および $g(\cdot)$ の連続性より $C_t \in \Sigma(t)$ が導かれる．しかるに

$$T_\omega \leqq t \iff \omega \in C_t \tag{18}$$

が成立することから．

$$\{\omega : T_\omega \leqq t\} = C_t \in \Sigma(t) \subset \Sigma(T) \qquad (19)$$

を得る。このことは T_ω したがって $x(\omega, T_\omega)$ が確率変数であることを示している。

つぎに、T_ω の定義により、

$$g(x(\omega, t_n(\omega))) = 0 \quad \& \quad t_n(\omega) \downarrow T_\omega \ (n\to\infty) \quad w.p.1.$$

となるような単調減少収束列 $t_1(\omega) \geqq t_2(\omega) \geqq \cdots \geqq t_n(\omega) \geqq \cdots$ が存在する。したがって、$g(\cdot)$ および $x(\omega, \cdot)$ の連続性により

$$g(x(\omega, T_\omega)) = \lim_{n\to\infty} g(x(\omega, t_n(\omega))) = 0 \quad w.p.1.$$

—— 証明了 ——

定理1（問題Ｉに関する最適解の存在性）

(SI) 型の系に対して、(A1)～(A5) を仮定し、さらに、$f_0 \geqq 0$ および $Z(\omega, t)$ の標本函数は確率 1 で連続とする。

$\mathfrak{F}_1 \neq \phi$

$$\Rightarrow \qquad R(u^*) = \inf_{u\in\mathfrak{F}_1} R(u)$$

を満足する admissible control $u^* \in \mathfrak{F}_1$ が存在する。

定理2（問題Ⅱに関する最適解の存在性）

(SI) 型の系に対して、(A1)～(A5) を仮定する。

$\mathfrak{F}_2 \neq \phi$

$$\Rightarrow \qquad R(u^*, T^*) = \inf_{(u,T)\in\mathfrak{F}_2} R(u, T)$$

を満足する admissible pair $(u^*, T^*) \in \mathfrak{F}_2$ が存在する。

注意8. 定理2では、$f_0 \geqq 0$ および $Z(\omega,\cdot)$ の連続性を仮定しなくても最適解が存在することに注意されたい。

§4. 最適制御問題Ⅲの定式化と最適解の存在性

(SI)型の系に代って、つぎのような確率微分方程式系で記述された制御過程を考える。

(SⅡ) $$x(\omega,t) = x(\omega,0) + \int_0^t A(\tau)x(\omega,\tau)d\tau + \int_0^t b(u(\omega,\tau))d\tau + Z(\omega,t) - Z(\omega,0) \quad (20)$$

ここに、$x_0(\omega,0) \equiv 0$，$Z_0(\omega,t) \equiv 0$ とし、$A(\tau) \equiv \left(a_{ij}(\tau)\right)$ は成分が $a_{ij} : E^1 \to E^1$，$i,j = 0,1,\cdots,n-1$ なる $n \times n$-行列とする。

(SI)型の系では、制御 u は現時点における状態 $x(\omega,t)$ だけを観測して、$x(\omega,t)$ の函数として決定されたのであるが、上の(SⅡ)型の系では、制御 $u(\omega,t)$ の値は過去の状態 $\underbrace{x(\cdot,\tau)}_{(\tau<t)}$ の観測値の函数、あるいは汎函数として決定したい。

そこでより一般の *admissible controls* のクラスを定義しておこう。

$\Sigma_c(t)$ は $\Sigma(t)$ の *sub* σ-*field* として与えられたものとし、$\tilde{\Sigma}_c(T) \equiv \mathcal{B}\left(\bigcup_{0\leq t\leq T}(\Sigma_c(t) \times \mathfrak{T}(T))\right)$ は $\bigcup_{0\leq t\leq T}(\Sigma_c(t) \times \mathfrak{T}(T))$ を含む最小の σ-*field* とする。

(A3)〜(A5)の他に、つぎの4つの条件(A6)〜(A9)

を仮定する。

(A6) $u(\cdot,t)$ は Ω 上で $\sum_c(t)$-可測。

$u(\cdot,\cdot)$ は $\Omega\times[0,T]$ 上で $\tilde{\sum}_c(T)$-可測。

$u(\omega,\cdot)$ は $[0,T]$ 上で Lebesgue 可測. 但し $T=T_u$.

(A7) $u(\omega,t)\in U$ 但し. U は E^r 内に与えられたコンパクト集合とする。

(A8) $A(\cdot)$ の各成分 $a_{ij}(\cdot)$, $i,j=0,1,\cdots,n-1$ は有界かつ Lebesgue 可測とする。

(A9) $b: E^r \longrightarrow E^n$ は連続写像とし、$b(U)$ は E^n 内のコンパクトな凸集合とする。

いま. (A6) ～ (A7) を満足する制御函数 $u(\cdot,\cdot)$ の全体を $\tilde{\mathfrak{F}}$ で表わすことにする。

<u>補題2.</u>

(SII) 型の系に対して、(A3) ～ (A9) を仮定する。$x(0)=(0, x_1(0),\cdots,x_{n-1}(0))$ は任意に与えられた n 次元の定数ベクトルとする。しかるば.

制御 $u\in\tilde{\mathfrak{F}}$ に対応し、初期条件 $x(\omega,0)=x(0)$ を満足する (SII) の Lebesgue 積分可能な $x(\omega,\cdot)$ が閉区間 $0\leqslant t\leqslant T=T_u$ において確率1で存在して、しかも高々 μ 測度零の ω-集合を除いて一意に決まる (解の存在性と一意性)。更に、$x(\cdot,t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ は $\sum(t)$-可測

である（解の可測性）。

注意9．補題2の証明は補題1の証明と同様にPicardの反復法によって導かれる（証明略）。

さて、制御 $u \in \tilde{\mathfrak{F}}$ に対応する（SII）の解 $x(\omega, t)$, $t \geq 0$ に対して、

$$g(E x(\omega, T)) = 0 \tag{21}$$

を満足する non-random terminal time $T = T(u)$ を考えて、Risk function

$$R(u, T) \equiv E x_0(\omega, T) \tag{22}$$

を定義する。最適制御問題IIIを定式化するために、admissible pairs (u, T) のクラスとして

$$\mathfrak{F}_3 \equiv \mathfrak{F}_3(\hat{T}) = \left\{ (u,T) : \begin{array}{l} u \in \tilde{\mathfrak{F}},\ g(E x(\omega,T)) = 0,\ 0 \leq T \leq \hat{T} \\ \& \ R(u,T) = E x_0(\omega,T) \text{ が有限} \end{array} \right\} \tag{23}$$

を考える。但し、$\hat{T}$ は与えられた有限の定数とする。

問題III

$$R(u^*, T^*) = \inf_{(u,T) \in \mathfrak{F}_3} R(u, T) \tag{24}$$

を満足する $(u^*, T^*) \in \mathfrak{F}_3$ が存在するか？

定理3.（問題IIIに関する最適解の存在性）

（SII）型の系に対して、（A3）～（A9）を仮定する。

$\mathfrak{F}_3 \neq \phi$

$\Longrightarrow$ (24) を満足する admissible pair $(u^*, T^*) \in \mathcal{F}_3$ が存在する。

定理3を証明するために、つぎの補題3を準備しておく。

補題3.(可測陰函数の存在性)

S：抽象空間, $\mathcal{B}$：S上の σ-field, $U \subset E^r$, $b: U \to E^n$ は $b(U)$ がコンパクト集合となる連続写像とし、$\gamma: S \to E^n$ は$\mathcal{B}$-可測とする。しからば、

$$\gamma(S) \subset b(U) \tag{25}$$

$$\Longrightarrow \quad \gamma(\sigma) = b(u(\sigma)) \quad \text{for all } \sigma \in S \tag{26}$$

となるある$\mathcal{B}$-可測函数 $u(\sigma)$ が存在する。

注意10.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\exists u"'] & E^n \\ U \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

補題3よりもっと一般化された結果については、A.F. Filippov [10] & R. Datko [11] の補題を拡張した [9], pp. 193～194 を参照されたい。

定理3の証明

$$\alpha \equiv \inf_{(u,T)\in\mathcal{F}_3} R(u,T) \quad \text{とおくと、}$$

$$\exists\, \text{sequence}\{(u^k, T^k) \in \mathcal{F}_3\} : \ \alpha = \lim_{k\to\infty} R(u^k, T^k) \tag{27}$$

(単調減少収束)

$$T^* \equiv \lim_{k\to\infty} T^k \quad \text{とおくと、}$$

$$\exists\, \text{subsequence}\{k_i\} \subset \{k\} : \ T^* = \lim_{k_i\to\infty} T^{k_i} \leqq \hat{T} \tag{28}$$

しかるに、$b(U)$ がコンパクト集合であることから、

$\exists$ subsequence $\{k_j\} \subset \{k_i\}$ & $\exists\, U^*(\omega,t) \in \tilde{\mathfrak{F}}$:

$$\int_A b(U^{k_j}(\omega,t))\, m(d\omega\times dt) \underset{(k_j\to\infty)}{\longrightarrow} \int_A b(U^*(\omega,t))\, m(d\omega\times dt) \quad (29)$$

$$\text{for all } A \in \tilde{\Sigma}_c(T^*)$$

が成立する。

$$\delta_{k_j}(t) \equiv \int_0^t E\left[b(U^{k_j}(\omega,t)) - b(U^*(\omega,t))\right]dt \quad (30)$$

とおくと、$\delta_{k_j}(t) \longrightarrow 0\ (k_j\to\infty)$ for each $0\leqslant t\leqslant T^*$.

いま、$U^*(\omega,t)\in\tilde{\mathfrak{F}}$ に対応する (SII) の解を $x^*(\omega,t)$, $0\leqslant t\leqslant \hat{T}$,
とおき、$U^{k_j}(\omega,t)\in\tilde{\mathfrak{F}}$ に対応する (SII) の解を $x^{k_j}(\omega,t)$, $0\leqslant t\leqslant \hat{T}$
とおくと、Gronwall の基本補題によって、不等式

$$\| E x^{k_j}(\omega,t) - E x^*(\omega,t) \| \leqslant \|\delta_{k_j}(t)\| + Mt\, e^{Mt} \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|\delta_{k_j}(s)\| \quad (31)$$

$$\longrightarrow 0\ (k_j\to\infty)$$

を得る。ここに、M はある有限の定数である。したがって、

$$E x^{k_j}(\omega,t) \underset{(k_j\to\infty)}{\longrightarrow} E x^*(\omega,t) \quad \text{for each } 0\leqslant t\leqslant T^* \quad (32)$$

$$\therefore\ E x^{k_j}(\omega, T^{k_j}) \longrightarrow E x^*(\omega, T^*) \quad (k_j\to\infty) \quad (33)$$

$$\therefore\ \alpha = \lim_{k_j\to\infty} R(U^{k_j}, T^{k_j}) = \lim_{k_j\to\infty} E x_0^{k_j}(\omega, T^{k_j})$$

$$= E x_0^*(\omega, T^*) = R(U^*, T^*) \quad (34)$$

また、$g(\cdot)$ の連続性によって、

$$g(E x^*(\omega,T^*)) = \lim_{k_j\to\infty} g(E x^{k_j}(\omega, T^{k_j})) = 0 \quad (35)$$

結局、(28), (34), (35) は $(U^*, T^*) \in \mathfrak{F}_3$ が最適解である

ことを示している。

最後に、(29) が成立することを証明しておこう。実際、

b(U) がコンパクト集合であることから、

$$E\int_0^{T^*} \| b(U^{k_i}(\omega,t)) \| dt = \int_0^{T^*} E \| b(U^{k_i}(\omega,t)) \| dt \leqslant K_4(T^*) < +\infty$$

（一様有界） (36)

となる u^{k_i} に依存しない有限の定数 $K_4(T^*)$ が存在する。

これより ∃ *subsequence* $\{k_j\} \subset \{k_i\}$:

$$b(u^{k_j}(\omega,t)) \xrightarrow[(k_j\to\infty)]{} \gamma(\omega,t) \quad (L_1 \text{ 弱収束}) \tag{37}$$

となる $\gamma : \Omega\times[0,T^*] \to E^n$ ($\tilde{\Sigma}_c(T^*)$-可測 & m-可積分) が存在する。但し、$L_1 = L_1(\Omega\times[0,T^*], \tilde{\Sigma}_c(T^*), m(d\omega\times dt))$ 。

(37) より、

$$\int_A b(u^{k_j}(\omega,t))m(d\omega\times dt) \xrightarrow[(k_j\to\infty)]{} \int_A \gamma(\omega,t)m(d\omega\times dt) \tag{38}$$

$$\text{for all } A\in\tilde{\Sigma}_c(T^*)$$

次に、

$$\gamma(\omega,t) = b(u^*(\omega,t)) \tag{39}$$

となる $\tilde{\Sigma}_c(T^*)$-可測函数 $u^*(\omega,t)$ が存在することを示せばよい。実際、<u>*Fatou の lemma*</u> を用いると

$\forall A\in\tilde{\Sigma}_c(T^*)$, $\forall y\in E^n$ (定数ベクトル) に対して、

$$\begin{aligned}
\int_A \sup_{v\in U} y'b(v)m(d\omega\times dt) &\geqq \int_A \overline{\lim_{k_j\to\infty}}\, y'b(u^{k_j}(\omega,t))m(d\omega\times dt)\\
&\geqq \overline{\lim_{k_j\to\infty}} \int_A y'b(u^{k_j}(\omega,t))m(d\omega\times dt)\\
&= \int_A y'\gamma(\omega,t)m(d\omega\times dt)\\
&= \underline{\lim_{k_j\to\infty}} \int_A y'b(u^{k_j}(\omega,t))m(d\omega\times dt)\\
&\geqq \int_A \underline{\lim_{k_j\to\infty}}\, y'b(u^{k_j}(\omega,t))m(d\omega\times dt)\\
&\geqq \int_A \inf_{v\in U} y'b(v)m(d\omega\times dt)
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\therefore \sup_{v\in U} y'b(v) \geqq y'\gamma(\omega,t) \geqq \inf_{v\in U} y'b(v) \quad \text{for all } y\in E^n \tag{41}$$

$$(\text{a.e.} (\omega,t)\in\Omega\times[0,T^*])$$

以後，(41)が m-測度零の集合上でも成立するように，$\gamma(\omega,t)$を再定義する．然るに，Uはコンパクト集合，かつ$b(U)$はコンパクトな凸集合であることから，

$$\gamma(\omega,t)\in b(U) \qquad \text{for all } (\omega,t)\in\Omega\times[0,T^*] \tag{42}$$

ところが，$b(\cdot)$は連続であり，かつ$\gamma(\omega,t)$は$\tilde{\Sigma}_c(T^*)$-可測であるから，可測陰函数の存在性についての補題3を適用すると，(39)を満足する$\tilde{\Sigma}_c(T^*)$-可測函数$u^*(\omega,t)$が存在することが示される。

―― 定理3の証明了 ――

§5．問題点

[I] 最適解の存在性

1) 一般の非線形制御系

$$(\mathrm{S\,III}) \quad dx(\omega,t) = f(x(\omega,t),\,u(\omega,t))dt + dZ(\omega,t) \tag{43}$$

に対して，問題IIIの最適解が存在するか？

2) (SIII) 型の系に対して，*admissible controls* のクラスとして

$$\mathcal{F}_4 \equiv \mathcal{F}_4(\hat{T}) = \left\{ u\in\tilde{\mathcal{F}} : \begin{array}{l} 0\leqq T_\omega \equiv \inf\{t : g(x(\omega,t))=0\}<+\infty \ \ w.p.1, \\ ET_\omega \leqq \hat{T},\ R(u)\equiv Ex_0(\omega,T_\omega) \text{ が有限} \end{array} \right\}$$

但し，$\hat{T}$は与えられた有限の定数． (44)

を考えた場合に，

$$R(u^*) = \inf_{u\in\mathcal{F}_4} R(u) \tag{45}$$

を満足する $u^*\in\mathcal{F}_4$ が存在するか？（問題IV）

3) (SⅢ) 型の系の場合に、$f(x, U) \equiv \{ f(x, u) : u \in U \}$ の compact 性とか convex 性を仮定しないで、もっと弱い条件(たとえば、L. Cesari [3], [4], [5] の条件)で最適解の存在性がいえないだろうか?

4) マルコフ性をもつ時間離散型系の場合の最適解の存在性については、D. Blackwell [12], [13] らが証明済みである。時間連続型系を時間離散型系で近似させることによって最適解の存在性がいえないだろうか?

[Ⅱ] 最適解の構成法

1) 最大原理による解法([14], [15], [16] 参照)。

2) D. P. による解法([7] 参照)。

参考文献

[1] LaSalle, J.P., Time optimal control systems, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol.45, pp.573~577 (1959).

[2] Roxin, E.O., The existence of optimal controls, Michigan Math. J., Vol.9, pp.109~119 (1962).

[3] Cesari, L., Existence theorems for weak and

usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints. I., Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 124, pp. 369 ~ 412 (1966).

[4] Cesari. L., Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints. II. Existence theorems for weak solutions, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 124, pp. 413 ~ 430 (1966).

[5] Cesari. L., Existence theorems for multidimensional Lagrange problems, J. Optimization Theory and Applications, Vol. 1, No. 2, pp. 87 ~ 112 (1967).

[6] Kushner, H.J., On the existence of optimal stochastic controls, J. Soc. Ind. Appl. Math. Control, Vol. 3, pp. 463 ~ 474 (1965).

[7] Kushner, H.J., Optimal discounted stochastic control for diffusion processes, J. Soc. Ind. Appl. Math. Control, Vol. 5, No. 4, pp. 520 ~ 531 (1967).

[8] Fleming, W.H. & Nisio, Makiko, On the existence of optimal stochastic controls, J. Math. Mech., Vol. 15, No. 5, pp. 777 ~ 794 (1966).

[9] Oğuztöreli, N.N., "Time-lag Control Systems",

Academic Press, New York, 1966.

[10] Filippov, A.F., On certain questions in the theory of optimal control, J. SIAM. Control, Vol.1, PP. 76 ~ 84 (1962).

[11] Datko, R., An implicit function theorem with an application to control theory, The Michigan Math. J., Vol.11, PP. 345 ~ 351 (1964).

[12] Blackwell, D., Discrete dynamic programming, Ann. Math. Statist., Vol.33, PP. 719 ~ 726 (1962).

[13] Blackwell, D., Discounted dynamic programming, Ann. Math. Statist., Vol.36, PP. 226 ~ 235 (1965).

[14] Kushner, H.J., On the stochastic maximum principle, fixed time of controls. J. Math. Anal. Appl. Vol.11., PP. 78 ~ 92 (1965).

[15] Kushner, H.J., On the stochastic maximum principle with "average" constraints, J. Math. Anal. Appl. Vol.12, PP. 13 ~ 26 (1965).

[16] 南 正義；確率的系における最適制御過程について．動的計画法研究会報告集，数理解析研究所講究録28，PP. 15 ~ 47 (1967).

§6. 補足

最後に，定理1，定理2および補題3の証明を付け加えておこう。

定理1の証明

$\alpha \equiv \inf_{u \in \mathcal{F}_1} R(u)$ とおくと，

$$\exists \text{ sequence } \{u^k \in \mathcal{F}_1\} : \quad \alpha = \lim_{k \to \infty} R(u^k) \tag{46}$$

（単調減少収束）

然るに，$u^k \in \mathcal{F}$，$k=1,2,\cdots$ である（i.e.（3）を満足する）ことから，Ascoli-Arzelaの定理によって，

$\exists$ subsequence $\{k_i\} \subset \{k\}$ & $\exists\, u^* \in \mathcal{F}$:

$$\lim_{k_i \to \infty} u^{k_i}(x,t) = u^*(x,t) \tag{47}$$

ここに，(47)の極限は $E^n \times [0,\infty)$ 内のすべてのcompact集合D上で一様収束する極限を意味し，$u^*(x,t)$ はDに依存しないように取れる。

いま，Tを任意の正数とし，$u^{k_i}(x,t)$，$0 \leq t \leq T$ に対応する（SI）の解を $x^{k_i}(\omega,t)$，$0 \leq t \leq T$ とおいて，

$$T_\omega^{k_i} \equiv \inf\{t : g(x^{k_i}(\omega,t)) = 0\} \tag{48}$$

とする。さらに，$u^*(x,t)$，$0 \leq t \leq T$ に対応する(SI)の解を $x^*(\omega,t)$，$0 \leq t \leq T$ とおいて，

$$T_\omega^* \equiv \inf\{t : g(x^*(\omega,t)) = 0\} \tag{49}$$

とする。（A1），（A2），（A3），（A4）に注意して，

Gronwall の基本補題を適用すると，

$$E \sup_{0\leqq t\leqq T} \|x^{k_i}(\omega,t)-x^*(\omega,t)\| \leqq K_3 \int_{\Omega\times[0,T]} \|u^{k_i}(x^*(\omega,t),t)-u^*(x^*(\omega,t),t)\|\, m(d\omega\times dt) \qquad (50)$$

ここに，$K_3>0$ はある有限の定数である。

更に，(3) および (47) に注意して，Lebesgue の収束定理を適用すると，(50) の左辺は，$k_i\to\infty$ のとき，0 に収束する。したがって，

∃ subsequence $\{k_j\}\subset\{k_i\}$:

$$\sup_{0\leqq t\leqq T} \|x^{k_j}(\omega,t)-x^*(\omega,t)\| \xrightarrow[(k_j\to\infty)]{} 0 \quad (w.p.1) \qquad (51)$$

つぎに，$\bar{T}_\omega = \underline{\lim}_{k_j\to\infty} T_\omega^{k_j}$ とおくと，

∃ subsequence $\{k_\nu\}\subset\{k_j\}$:

$$\bar{T}_\omega = \lim_{k_\nu\to\infty} T_\omega^{k_\nu} \qquad (52)$$

然るに，Fatou の基本補題によって，

$$E\bar{T}_\omega = E\,\underline{\lim}_{k_j\to\infty} T_\omega^{k_j} \leqq \underline{\lim}_{k_j\to\infty} E T_\omega^{k_j} \leqq \hat{T} < +\infty$$

$$\therefore \quad \bar{T}_\omega < +\infty \quad (w.p.1) \qquad (53)$$

また，補題1の 1° によると，$x^*(\omega,\cdot)$ は確率1で連続であるから，

$$\lim_{k_\nu\to\infty} \|x^*(\omega,T_\omega^{k_\nu})-x^*(\omega,\bar{T}_\omega)\| = 0 \quad (w.p.1) \qquad (54)$$

それゆえ，(51) と (54) より，

$$\lim_{k_\nu\to\infty}\|x^{k_\nu}(\omega,T_\omega^{k_\nu}) - x^*(\omega,\overline{T}_\omega)\| = 0 \quad (w.p.1) \tag{55}$$

したがって、函数 $g(x)$ の連続性によって、

$$g(x^*(\omega,\overline{T}_\omega)) = \lim_{k_\nu\to\infty} g(x^{k_\nu}(\omega,T_\omega^{k_\nu})) = 0 \tag{56}$$

（∵補題1 の 3° によれば、(48) より $\underset{\nu=1,2,\cdots\cdots}{g(x^{k_\nu}(\omega,T_\omega^{k_\nu})) = 0}$ が

導かれるから ）。

また、(55) によって、

$$\lim_{k_\nu\to\infty} x_0^{k_\nu}(\omega,T_\omega^{k_\nu}) = x_0^*(\omega,\overline{T}_\omega) \quad (w.p.1) \tag{57}$$

再び、Fatouの基本補題を適用すると、

$$\begin{aligned} E x_0^*(\omega,\overline{T}_\omega) &= E\lim_{k_\nu\to\infty} x_0^{k_\nu}(\omega,T_\omega^{k_\nu}) \\ &\leqslant \lim_{k_\nu\to\infty} E x_0^{k_\nu}(\omega,T_\omega^{k_\nu}) = \lim_{k_\nu\to\infty} R(u^{k_\nu}) = \alpha \end{aligned} \tag{58}$$

ところが、(49) と (56) によって、

$$T_\omega^* \leqslant \overline{T}_\omega \quad (w.p.1) \tag{59}$$

然るに、$f_0 \geqslant 0$ であるから、$x_0(\omega,t)$ は t に関して単調非減少な函数となる。したがって、(58) と (59) によって、

$$R(u^*) = E x_0(\omega,T_\omega^*) \leqslant E x_0(\omega,\overline{T}_\omega) \leqslant \alpha = \inf_{u\in\mathfrak{F}_1} R(u) \tag{60}$$

ここに、$u^*\in\mathfrak{F}_1$ であるから、(60) は

$$R(u^*) = \operatorname*{Min}_{u\in\mathfrak{F}_1} R(u) \tag{61}$$

を意味している。従って、$u^*\in\mathfrak{F}_1$ は最適制御である。

――――――――――――――――――――――――――――――― 定理1の証明了

定理2の証明

$$\alpha \equiv \inf_{(u,T)\in\mathfrak{F}_2} R(u,T)$$ とおくと、

$$\exists \text{ sequence } \{(u^k, T^k) \in \mathfrak{F}_2\} : \quad \alpha = \lim_{k\to\infty} R(u^k, T^k) \tag{62}$$

然るに、$u^k \in \mathfrak{F}$ であるから、定理1の証明と同様に、

Ascoli - Arzela の定理を適用すると、

$$\exists \text{ subsequence } \{k_i\} \subset \{k\} \quad \& \quad \exists\, u^* \in \mathfrak{F} :$$

$$\lim_{k_i\to\infty} u^{k_i}(x, t) = u^*(x, t) \tag{63}$$

ここに、(63)の極限は $E^n \times [0, \infty)$ 内のすべての compact 集合上で一様収束する極限を意味する。

いま、$u^{k_i} \in \mathfrak{F}$ および $u^* \in \mathfrak{F}$ に対応する(SI)の解をそれぞれ $x^{k_i}(\omega, \cdot)$ および $x^*(\omega, \cdot)$ とする。

定理1の証明と同様に(A1), (A2), (A3), (A4)に注意して、Gronwall の基本補題を適用すると、(50)が得られる。

したがって、(50)と(63)によって、

$$\lim_{k_i\to\infty} E x^{k_i}(\omega, t) = E x^*(\omega, t) \tag{64}$$

（tに関して一様収束する）

さらに、$T^* \equiv \varliminf_{k_i\to\infty} T^{k_i}$ とおくと、

$$\exists \text{ subsequence } \{k_j\} \subset \{k_i\} : \quad T^* = \lim_{k_j\to\infty} T^{k_j} \tag{65}$$

したがって、(64)と(65)によって、

$$\lim_{k_j\to\infty} E x^{k_j}(\omega, T^{k_j}) = E x^*(\omega, T^*) \tag{66}$$

然るに、函数 $g(x)$ は連続であるから、

$$g(E x^*(\omega, T^*)) = \lim_{k_j\to\infty} g(E x^{k_j}(\omega, T^{k_j})) = 0 \tag{67}$$

（$\because$ $(u^{k_j}, T^{k_j}) \in \mathfrak{F}_2$ より $g(E x^{k_j}(\omega, T^{k_j})) = 0$ ）

また、$T^{k_j} \leqq \hat{T}$ であるから、$T^* \leqq \hat{T}$ となる。したがって、$(u^*, T^*) \in \mathfrak{F}_2$ が得られる。

一方、(62) と (66) によって、

$$\alpha = \lim_{k_j \to \infty} R(u^{k_j}, T^{k_j}) = \lim_{k_j \to \infty} E x_0^{k_j}(\omega, T^{k_j})$$

$$= E x_0^*(\omega, T^*) = R(u^*, T^*) \qquad (68)$$

したがって、 $R(u^*, T^*) = \underset{(u,T)\in\mathfrak{F}_2}{Min} R(u, T)$ (69)

が成立する。すなわち、$(u^*, T^*) \in \mathfrak{F}_2$ は最適解である。

——————————————————— 定理2の証明了

補題3の証明

$b(U)$ がコンパクト集合であることから、$\gamma(\mathcal{S})$ は有界となる。したがって、各自然数 n に対して、次のような性質を満足する $\mathcal{S}$ の有限分割 $\{A_n^i\}$ が存在する。すなわち、

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^{m} A_n^i, \quad A_n^i \cap A_n^j = \phi \ (i \neq j), \quad A_n^i \in \mathcal{B}$$

$$\& \quad \| \gamma(\sigma) - \gamma(\sigma') \| \leqq \frac{1}{2^n}, \ \text{for all } \sigma, \sigma' \in A_n^i \qquad (70)$$

いま、適当な $\sigma_n^i \in A_n^i$ を固定すると、$\gamma(\mathcal{S}) \subset b(U)$ であることから、$\sigma_n^i \in A_n^i$ に対して、

$$\exists\, u' = u'(\sigma_n^i) \in U \ : \ \gamma(\sigma_n^i) = b(u') = b(u'(\sigma_n^i)) \qquad (71)$$

次に、 $u_n(\sigma) = u'(\sigma_n^i)$ for all $\sigma \in A_n^i$ (72)

とおくと、階段函数 $u_n(\sigma)$ は $\mathcal{B}$-可測である。

然るに、(70), (71), (72) によると、任意の $\sigma \in A_n^i$ に対して、

$$\|\gamma(\sigma)-b(u_n(\sigma))\|=\|\gamma(\sigma)-b(u'(\sigma_n^i))\|$$
$$=\|\gamma(\sigma)-\gamma(\sigma_n^i)\|\leqslant\frac{1}{2^n} \qquad (73)$$

したがって、(73)は任意の$\sigma\in\mathcal{S}$に対して成立する。

(73) において、$n\to\infty$とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\|\gamma(\sigma)-b(u_n(\sigma))\|=0\ ,\ \forall\sigma\in\mathcal{S} \qquad (74)$$

いま、 $u(\sigma)\equiv\lim_{n\to\infty}u_n(\sigma)\ ,\ \sigma\in\mathcal{S}$ (75)

とおくと、函数$u(\sigma)$ は$\mathcal{S}$上で$\mathcal{B}$-可測である。

また、(75) によると、各$\sigma\in\mathcal{S}$に対して、

$$\exists\ \text{subsequence}\ \{n_k(\sigma)\}\subset\{n\}\ :\ u(\sigma)=\lim_{n_k(\sigma)\to\infty}u_{n_k(\sigma)}(\sigma) \qquad (76)$$

然るに、写像$b(\mathcal{U})$の連続性によって、

$$\lim_{n_k(\sigma)\to\infty}\|b(u_{n_k}(\sigma))-b(u(\sigma))\|=0\ ,\ \forall\sigma\in\mathcal{S} \qquad (77)$$

したがって、(74)と(77) によって、

$$\|\gamma(\sigma)-b(u(\sigma))\|\leqslant\|\gamma(\sigma)-b(u_{n_k(\sigma)}(\sigma))\|$$
$$+\|b(u_{n_k(\sigma)}(\sigma))-b(u(\sigma))\|\xrightarrow[(n_k(\sigma)\to\infty)]{}0 \qquad (78)$$

これより、$\gamma(\sigma)=b(u(\sigma))$ for all $\sigma\in\mathcal{S}$ が成立する。

———————————————— 補題3の証明了